BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2013

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТИПА РОССЕРА

А.Я.ДЖАББАРОВА[*,], К.Б.МАНСИМОВ[*,**]**

Бакинский Государственный Университет[*]

Институт Кибернетики Национальной Академии Азербайджана[**]

mansimov@front.ru

В работе изучается одна задача оптимального управления процессами, описываемые дискретно-непрерывными системами типа Россера. Получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: дискретно-непрерывная система типа Россера, вариация функционала, уравнение в вариациях, уравнение Эйлера, необходимое условие оптимальности второго порядка.

Дискретно-непрерывные задачи оптимального управления типа Россера имеют большое прикладное значение (см. напр. [1-3]). Заметим, что дискретно-непрерывная система уравнений типа Россера была введена в рассмотрение в работах [1, 2] Т. Качзореком.

В предлагаемой работе изучается одна задача оптимального управления дискретно-непрерывными системами типа Россера и выводятся необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в случае открытости области управления.

Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается следующей системой нелинейных уравнений, представляющий собой «смесь» дифференциальных и разностных уравнений

$$
\begin{aligned}
&z_t(t,x)= f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big),\ \ t\in T=[t_0,t_1],\ \ x=x_0,\, x_0+1,\dots,\, x_1, \qquad (2.1)\\
&y(t,x+1)=g\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big),\ \ t\in T\,,\ \ x=x_0,\, x_0+1,\dots,\, x_1-1
\end{aligned}
$$

с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
&z(t_0,x)=a(x),\quad x=x_0,\, x_0+1,\dots,\, x_1, \qquad (2.2)\\
&y(t,x_0)=b(t),\quad t\in T=[t_0,t_1].
\end{aligned}
$$

Здесь $f(t,x,z,y)$, $\big(g(t,x,z,y)\big)$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,y) до второго порядка включительно, $b(t)$ – заданная m-мерная непрерывная вектор-функция, $a(x)$ – n-мерная дискретная вектор-функция являющаяся решением задачи

$$a(x+1)=F(x,a(x),v(x)),$$
$$a(x_0)=a_0, \qquad (2.3)$$

где $F(x,a,v)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a,v) до второго порядка включительно, a_0 – задан, а $v(x)$ – r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества V, т.е.

$$v(x)\in V\subset R^r, \quad x=x_0, x_0+1,..., x_1-1. \qquad (2.4)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(v)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_1(x,z(t_1,x))+\int_{t_0}^{t_1}\varphi_2(t,y(t,x_1))dt, \qquad (2.5)$$

определенного на решениях системы (2.1)-(2.3) порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\varphi_1(x,z)$ $(\varphi_2(t,y))$ – заданная скалярная функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z (y) до второго порядка включительно.

Допустимое управление $v(x)$, доставляющий минимум функционалу (2.5), при ограничениях (2.1)-(2.4) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(v(x),z(t,x),y(t,x),a(x))$ – оптимальным процессом.

Вычисления вариаций функционала качества. Пусть $(v(x),z(t,x),y(t,x),a(x))$ фиксированный допустимый процесс. В силу открытости области управления V специальное приращение допустимого управления $v(x)$ можно определить по формуле

$$\Delta v_\varepsilon(x)=\varepsilon\,\delta v(x), \quad x=x_0, x_0+1,..., x_1-1. \qquad (3.1)$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta v(x)\in R^r$, $x=x_0, x_0+1,..., x_1-1$ произвольная r- мерная ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления).

Через $(\Delta z_\varepsilon(t,x),\Delta y_\varepsilon(t,x),\Delta a_\varepsilon(x))$, обозначим специальное приращение состояния $(z(t,x),y(t,x),a(x))$ и введем следующие обозначения:

$$f_z(t,x)\equiv f_z(t,x,z(t,x),y(t,x)),$$
$$f_y(t,x)\equiv f_y(t,x,z(t,x),y(t,x)),$$

$$g_z(t,x) \equiv g_z(t,x,z(t,x),y(t,x)),$$
$$g_y(t,x) \equiv g_y(t,x,z(t,x),y(t,x)),$$
$$F_a(x) \equiv F_a(x,a(x),v(x)),$$
$$F_v(x) \equiv F_v(x,a(x),v(x)).$$

Имеет место

Лемма 3.1. Для специального приращения $(\Delta z_\varepsilon(t,x),\Delta y_\varepsilon(t,x),\Delta a_\varepsilon(x))$ вектора состояния $(z(t,x),y(t,x),a(x))$ справедливы следующие разложения

$$\begin{cases} \Delta z_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\,\delta z(t,x) + o(\varepsilon;\ t,x), \\ \Delta y_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\,\delta y(t,x) + o(\varepsilon;\ t,x), \\ \Delta a_\varepsilon(x) = \varepsilon\,\delta a(x) + o(\varepsilon;\ x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь $(\delta z(t,x),\delta y(t,x),\delta a(x))$ – допустимая вариация вектора состояния, являющаяся решением системы уравнений в вариациях

$$\delta z_t(t,x) = f_z(t,x)\delta z(t,x) + f_y(t,x)\delta y(t,x), \tag{3.3}$$
$$\delta y(t,x+1) = g_z(t,x)\delta z(t,x) + g_y(t,x)\delta y(t,x),$$
$$\delta z(t_0,x) = \delta a(x), \quad x = x_0,\ x_0+1,\ldots,\ x_1,\ \ \delta y(t,x_0) = 0,\ \ t \in T,$$
$$\delta a(t+1) = F_a(x)\delta a(x) + F_v(x)\delta v(x), \tag{3.4}$$
$$\delta a(x_0) = 0.$$

Учитывая (3.2) вычислим специальное приращение функционала качества, используя формулу Тейлора:

$$S(v+\varepsilon\delta v) - S(v) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\varphi_1(x,z(t_1,x)+\Delta z_\varepsilon(t_1,x)) - \varphi_1(x,z(t_1,x))\right] +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\varphi_2(t,y(t,x_1)+\Delta y_\varepsilon(t,x_1)) - \varphi_2(t,y(t,x_1))\right]dt = \varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_1'(x,z(t_1,x))}{\partial z}\delta z(t_1,x) +$$
$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_2'(t,y(t,x_1))}{\partial y}\delta y(t,x_1)dt + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x) +\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\delta y(t,x_1)dt\right] + o(\varepsilon^2). \tag{3.5}$$

Пусть $p(t,x)$, $q(t,x)$, $\psi(x)$ пока неизвестные вектор функции соответствующих размерностей. В дальнейшем, особо не отмечая, будем использовать следующего типа обозначения:

$$H(t,x,z,y,p,q) = p'f(t,x,z,y) + q'g(t,x,z,y),$$
$$M(x,a,v,\psi) = \psi'F(x,a,v), \qquad M_a(x) = M_a(x,a(x),v(x),\psi(x)),$$

$$M_{aa}(x)=M_{aa}(x,a(x),v(x),\psi(x)),\quad M_{va}(x)=M_{va}(x,a(x),v(x),\psi(x)),$$

$$H_z(t,x)=H_z(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$H_y(t,x)=H_y(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$H_{zz}(t,x)=H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$H_{zy}(t,x)=H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$H_{yz}(t,x)=H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$H_{yy}(t,x)=H_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)).$$

С учетом (3.3)-(3.4), и введенных обозначений, разложение (3.5) представляется в виде

$$S(v+\varepsilon\delta v)-S(v)=\varepsilon\left[\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_1'(x,z(t_1,x))}{\partial z}\delta z(t_1,x)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_2'(t,y(t,x_1))}{\partial y}\delta y(t,x_1)dt\right]+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\delta y(t,x_1)dt\right\}+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'(t_1,x)\delta z(t_1,x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x-1}p'(t_0,x)\delta z(t_0,x)-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p_t'(t,x)\delta z(t,x)dt-$$

$$-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H_z(t,x)\delta z(t,x)+H_y(t,x)\delta y(t,x)\right]dt-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x)+\delta z'(t,x)H_{zy}(t,x)\delta y(t,x)+\right.\tag{3.6}$$

$$\left.+\delta y'(t,x)H_{yz}(t,x)\delta z(t,x)+\delta y'(t,x)H_{yy}(t,x)\delta y(t,x)\right]dt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\delta q'(t,x_1-1)\delta y(t,x_1)dt-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\delta q'(t,x_0-1)\delta y(t,x_0)dt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}q'(t,x-1)\delta y(t,x)dt+\varepsilon\psi'(x_1-1)\delta a(x_1)-\varepsilon\psi'(x_0-1)\delta a(x_0)+$$

$$+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x-1)\delta a(x)-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M_a'(x)\delta a(x)-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M_v'(x)\delta v(x)-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\delta a'(x)M_{aa}(x)\delta a(x)+2\delta v'(x)M_{va}(x)\delta a(x)+\delta v'(x)M_{vv}(x)\delta v(x)\right]+o(\varepsilon^2).$$

Если предполагать, что $(p(t,x), q(t,x), \psi(x))$ является решением системы уравнений

$$p_t(t,x) = -\frac{\partial H(t,x)}{\partial z}, \tag{3.7}$$

$$q(t,x-1) = \frac{\partial H(t,x)}{\partial y},$$

$$p(t_1,x) = -\frac{\partial \varphi_1(x, z(t_1,x))}{\partial z}, \tag{3.8}$$

$$q(t,x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_2(t, y(t,x_1))}{\partial y},$$

$$\psi(x-1) = \frac{\partial M(x)}{\partial a} + p(t_0,x), \tag{3.9}$$

$$\psi(x_1-1) = 0, \tag{3.10}$$

то разложение (3.6) примет вид

$$S(v+\varepsilon\,\delta v) - S(v) = -\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'(x)\delta v(x) +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x) + \int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\times\right.$$

$$\times\delta y(t,x_1)dt - \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x) + \delta z'(t,x)\times\right.$$

$$\times H_{zy}(t,x)\delta y(t,x) + \delta y'(t,x)H_{yz}(t,x)\delta z(t,x) + \left.\delta y'(t,x)H_{yy}(t,x)\delta y(t,x)\right]dt -$$

$$\left.-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\delta a'(x)M_{aa}(x)\delta a(x) + 2\,\delta v'(x)M_{va}(x)\delta a(x) + \delta v'(x)M_{vv}(x)\delta v(x)\right]\right\} + o(\varepsilon^2).$$

Отсюда в силу открытости области управления, учитывая определения вариаций (в классическом смысле) функционала, (см. напр. [4, 5]) получаем, что, если процесс $(v(x), z(t,x), y(t,x), a(x))$ оптимален, то вдоль него для всех $\delta v(x) \in R^r$, $x = x_0, x_0+1, \ldots, x_1-1$ выполняются соотношения

$$\delta^1 S(v;\delta v) \equiv -\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'(x)\delta v(x) = 0, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 S(v;\delta v) \equiv {} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\delta y(t,x_1)dt - \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x) + \right.\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$+\delta z'(t,x)H_{zy}(t,x)\delta y(t,x)+\delta y'(t,x)H_{yz}(t,x)\delta z(t,x)+\delta y'(t,x)H_{yy}(t,x)\delta y(t,x)\big]dt+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\delta a'(x)M_{aa}(x)\delta a(x)+2\,\delta v'(x)M_{va}(x)\delta a(x)+\delta v'(x)M_{vv}(x)\delta v(x)\right]\geq 0.$$

Из соотношения (3.11), в силу произвольности допустимой вариации $\delta v(x)$, получаем, что

$$M_v(\xi)=0. \qquad (3.13)$$

Теорема 3.1. Для оптимальности допустимого управления $v(x)$ необходимо, чтобы соотношение (3.13) выполнялось для всех $\xi\in X=\{x_0,x_0+1,\ldots,x_1-1\}$.

Соотношение (3.13) есть аналог уравнения Эйлера в рассматриваемой задаче.

Каждое допустимое управление удовлетворяющее уравнению Эйлера, назовем классической экстремалью (см. напр. [4-8]).

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности второго порядка.

Необходимые условия оптимальности второго порядка. Используя результаты работ [9-11] запишем представление решения задач (3.3), (3.4).

Пусть $V_{ij}(t,x;\,\tau,s)$, $i,j=1,2$ матричные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\partial V_{11}(t,x;\,\tau,s)}{\partial\tau}=-V_{11}(t,x;\,\tau,s)\,f_z(\tau,s)-V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s),$$

$$V_{11}(t,x;\,\tau,s-1)=V_{11}(t,x;\,\tau,s)\,f_y(\tau,s)+V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_y(\tau,s),$$

$$\frac{\partial V_{21}(t,x;\,\tau,s)}{\partial s}=-V_{21}(t,x;\,\tau,s)\,f_z(\tau,s)-V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s),$$

$$V_{22}(t,x;\,\tau,s-1)=V_{21}(t,x;\,\tau,s)\,f_y(\tau,s)+V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_y(\tau,s),$$

$$V_{11}(t,x;\,t,s)=0,\qquad x_0\leq s\leq x-2,$$

$$V_{11}(t,x;\,t,x-1)=E_1,$$

$$V_{12}(t,x;\,\tau,x-1)=0,\qquad \tau\in[t_0,t],$$

$$V_{21}(t,x;\,t,s)=0,\qquad x_0\leq s\leq x-1,$$

$$V_{22}(t,x;\,\tau,x-1)=E_2,$$

(E_1, E_2 – единичные матрицы соответствующих размерностей).

Тогда имеет место представление

$$\delta z(t,x)=V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\delta a(x)+\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,s)\delta a(s), \qquad (4.1)$$

$$\delta y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\frac{\partial V_{11}(t,x+1;\,t_0,s)}{\partial t}\delta a(s). \qquad (4.2)$$

Далее через $\Phi(x,s)$, обозначим решение задачи

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)F_a(s),$$
$$\Phi(x,x-1)=E_1.$$

Тогда решение задачи (3.4) допускает (см. напр. [10, 11]) представление

$$\delta a(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)F_a(s)\delta v(s). \qquad (4.3)$$

Займемся преобразованием представлений (4.1), (4.2) с учетом (4.3). Имеем [9]:

$$\delta z(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\Phi(x,s)F_a(s)\delta v(s)+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=x_0}^{s-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,s)\Phi(s,\tau)F_a(\tau)\delta v(\tau)\right]=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\Phi(x,s)\times$$
$$\times F_a(s)\delta v(s)+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,\tau)\Phi(\tau,s)\right]F_a(s)\delta v(s)=$$
$$=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\Phi(x,s)+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,\tau)\Phi(\tau,s)\right]F_a(s)\delta v(s).$$

Полагая

$$L_1(t,x,s)=V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\Phi(x,s)+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,\tau)\Phi(\tau,s),$$

последнее представление записывается в виде

$$\delta z(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}L_1(t,x,s)\,F_a(s)\delta v(s). \qquad (4.4)$$

Далее

$$\delta y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=x_0}^{s-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,s)}{\partial t}\Phi(s,\tau)F_a(\tau)\delta v(\tau)\right]=$$
$$=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,\tau)}{\partial t}\Phi(\tau,s)\right]F_a(s)\delta v(s). \qquad (4.5)$$

Положим

$$L_2(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,\tau)}{\partial t}\Phi(\tau,s).$$

Тогда представление (4.5) принимает вид

$$\delta y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}L_2(t,x,s)\,F_a(s)\delta v(s). \tag{4.6}$$

Используя представления (4.3), (4.4), (4.5), по схеме, например, работ [6-8, 11], доказывается справедливость тождеств

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)=$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}L_1(t_1,x,\tau)\,F_a(\tau)\delta v(\tau)\right)'\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}L_1(t_1,x,s)\,F_a(s)\delta v(s)\right)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau)F_a'(\tau)\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}L_1'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}L_1(t_1,x,s)\right\}F_a(s)\delta v(s),$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\delta y(t,x_1)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}L_2(t,x_1,\tau)\,F_a(\tau)\delta v(\tau)\right)'\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\left(\sum_{s=x_0}^{x_1-1}L_2(t,x_1,s)\,F_a(s)\delta v(s)\right)dt=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau)F_v'(\tau)\left[\int_{t_0}^{t_1}L_2'(t,x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}L_2(t,x_1,s)dt\right]F_v(s)\delta v(s),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x)+\delta z'(t,x)H_{zy}(t,x)\delta y(t,x)+\delta y'(t,x)H_{yz}(t,x)\times\right.$$

$$\left.\times\,\delta z(t,x)+\delta y'(t,x)H_{yy}(t,x)\delta y(t,x)\right]dt=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau)F_a'(\tau)\times$$

$$\times\left\{\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\left[L_1'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)L_1(t,x,s)+L_1'(t,x,\tau)H_{zy}(t,x)L_2(t,x,s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+L_2'(t,x,\tau)H_{yz}(t,x)L_1(t,x,s)\quad+L_2'(t,x,\tau)H_{yy}(t,x)L_2(t,x,s)\right]dt\right\}F_a(s)\delta v(s),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta a'(x)M_{yy}(x)\delta a(x)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau)F_a'(\tau)\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)M_{aa}(x)\Phi(x,s)\right\}F_a(s)\delta v(s),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta v'(x)M_{va}(x)\delta a(x)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)M'_{vy}(s)\Phi(s,x)\right]F_v(x)\delta v(x).$$

Введем матричную функцию $K(\tau,s)$ посредством формулы

$$K(\tau,s)=-\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}L_1'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}L_1(t_1,x,s)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}L_2'(t,x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}L_2(t,x_1,s)dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\left[L_1'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)L_1(t,x,s)+L_1'(t,x,\tau)H_{zy}(t,x)L_2(t,x,s)+\right. \tag{4.7}$$
$$\left.+L_2'(t,x,\tau)H_{yz}(t,x)L_1(t,x,s)+L_2'(t,x,\tau)H_{yy}(t,x)L_2(t,x,s)\right]dt+$$
$$+\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)M_{aa}(x)\Phi(x,s).$$

Принимая во внимание вышеприведенные тождества и учитывая обозначение (4.7), неравенство (3.10) преобразуется к виду

$$\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau)F_v'(\tau)K(\tau,s)\,F_v(s)\delta v(s)+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}\delta v'(s)M_{va}(s)\Phi(s,x)\right]\times$$
$$\times F_v(x)\delta v(x)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta v'(x)M_{vv}(x)\delta x(x)\le 0. \tag{4.8}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 4.1. Для оптимальности классической экстремали необходимо, чтобы неравенство (4.8) выполнялось для всех $v(x)\in R^r$, $x=x_0,\ x_0+1,\dots,\ x_1-1$.

Приведем более легко проверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка.

Теорема 4.2. Для оптимальности классической экстремали $v(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$w'\left[F_v'(\xi)K(\xi,\xi)\,F_v(\xi)+M_{vv}(\xi)\right]w\le 0,$$

выполнялось для всех $w\in R^r$ и $\xi\in X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaczorek T. Positive 2D Hybrid Linear Systems // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. 2007, v. 55, No 4, p. 351-358.
2. Kaczorek T., Marchenko V., Sajewski L. Sovlability of 2D Hybrid Linear Systems - Comparison of Three Different Methods // Actfa Mechanica et Automatica. 2008, v. 2, No 2, p.59-66.
3. Marchenko V.M., Borkovskaya I.M., Pyzhkova O.N. Hybrid Control discrete-continuous 2-D systems // Technical University of Bialyostok. 2010, p. 3-8.

4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн: БГУ, 1981, 400 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
6. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 2013, 353 с.
7. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 353 с.
8. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 174 с.
9. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. О представлении решений одной дискретно-непрерывной линейной системы типа Россера // Докл. НАН Азербайджана. 2013, № 8, с. 15-18.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн.: Белгосуниверситет, 1973, 248 с.
11. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 152 с.

BİR ROSSER TİPLİ DİSKRET-KƏSİLMƏZ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

A.Y.CABBAROVA, K.B.MƏNSİMOV

XÜLASƏ

İşdə diferensial və fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan və başlanğıc şərtin köməyilə idarə olunan bir diskret-kəsilməz optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: Rosser tipli diskret-kəsilməz sistem, funksionalın variasiyası, variasiyalı tənlik, Eyler tənliyi, optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərt.

A ROESSER TYPE CONTINUOUS -DISCRETE CONTROL PROBLEM

A.Y.JABBAROVA, K.B.MANSIMOV

SUMMARY

A continuous-discrete control problem described by a system of difference-differential equations and controlled by the initial condition is considered. First and second order necessary optimality conditions are obtained.

Key words: Roesser type discrete-continuous system, variation functional, variation equation, Euler equation, second order necessary optimality condition.

Поступила в редакцию: 22.11.2013 г.
Подписано к печати: 27.12.2013 г.